**32.Производная по направлению. Градиент**

Пусть функция http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image853.pngопределена в некоторой окрестности точки M(x;y), l – некоторое направление, задаваемое единичным вектором http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image946.png, где http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image948.png- направляющие косинусы вектора e. При перемещении в данном направлении l точки http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image950.pngв точку http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image952.pngфункция z получит приращение http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image954.png, называемое приращением функции z в данном направлении l.Определение. Производной http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image956.pngпо направлению l функции двух переменных http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image853.pngназывается предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image958.pngпри стремлении последней к нулю, то есть:http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image960.png  
Производная http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image956.pngхарактеризует скорость изменения функции в направлении l.  
Частные производные http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image963.pngи http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image965.pngпредставляют производные по направлениям, параллельным осям Ox и Oy.Производная по направлению вычисляется по формуле: http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image967.pngПример 1. Найти производную функции http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image969.pngв точке http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image971.pngв направлении точки http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image973.png.Решение: Производная по направлению находится по формуле http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image975.png.Найдем частные производные:http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image977.pngи http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image979.png.Найдем направляющие косинусы, задающие направление:http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image981.png.http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image983.pnghttp://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image985.pnghttp://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image987.png.Определение. Градиентом grad z (или http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image989.png) функции http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image991.pngв точке M называется вектор, координаты которого равны, соответственно, частным производным http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image993.pngв этой точке: http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image995.png  
Для функции двух переменных http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image853.pngградиент можно записать в виде: http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image998.pngГрадиент характеризует направление и величину максимальной скорости возрастания этой функции в точке.Найдем скалярное произведение векторов http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image1000.pngи единичного вектора http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image946.png. Получим следующее выражение: http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image1002.png  
Сравнивая равенства (8) и (11) получим, что http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image1004.png, то есть производная по направлению есть скалярное произведение градиента http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image989.pngи единичного вектора, задающего направление l.Пример 2. Найти градиент и его модуль для функции http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image1006.pngв точке http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image1008.png.Решение: http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image1010.png.В точке http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image1008.pngградиент равен http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image1012.png. Модуль градиента равен: http://ok-t.ru/studopedia/baza8/512536418147.files/image1014.png.